Kosinussatz – Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck 2 – Lösungen

1. Im Dreieck ABC sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben. Berechne die fehlende Seite und die fehlenden Winkel.

Gegeben:	**Gesucht:**
a) a = 9 cm; c = 5 cm; ß = 57°	b, α, γ
b) b = 1,7 m; c = 2,4 m; α = 64°	a, ß, γ
c) a = 43 m; b = 65 m; γ = 29,3°	c, α, ß

Lösung Aufgabe a)

Berechnung von b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos ß$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos ß}$$

$$b = 7{,}55 \text{ cm}$$

Berechnung von α:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin ß}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin ß}{b}$$

$$\alpha = 88{,}6°$$

Berechnung von γ:

γ = 180° – (88,6° + 57°) = 34,4°

Lösung Aufgabe b)

a = 2,25 m; ß = 42,8°; γ = 73,2°

Lösung Aufgabe c)

c = 34,63 m; α = 37,42°; ß = 113,28°

2. Im Dreieck ABC sind drei Seiten gegeben. Berechne die Winkel in der genannten Reihenfolge.

Gegeben:	**Gesucht.**
a) a = 4 cm; b = 5 cm; c = 6 cm	α, γ, ß
b) a = 2,7 m; b = 3,5 m; c = 4,2 m	ß; α, γ
c) a = 14 m; b = 11 m; c = 20 m	γ, α, ß

Lösung Aufgabe a)

Berechnung von α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = 41{,}4°$$

Berechnung von γ:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$$

$$\gamma = 82{,}9°$$

Berechnung von ß:

ß = 180° – (41,4° + 82,9°) = 55,7°

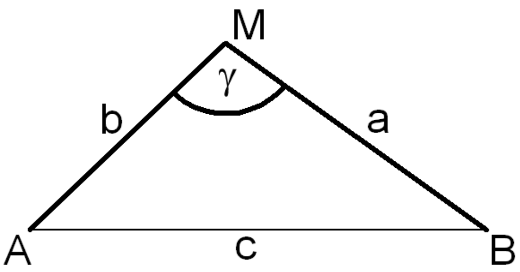
Lösung Aufgabe b)

ß = 56°; α = 39,8°; γ = 84,2°

Lösung Aufgabe c)

γ = 105,6°; α = 42,4°; ß = 32°

3. Zwei Ausfallstraßen führen von der Stadtmitte M zu den Siedlungen A und B. Sie sind $a = \overline{MA} = 3{,}9 \text{ km } (9{,}070 \text{ km})$ und $b = \overline{MB} = 2{,}5 \text{ km } (8{,}650 \text{ km})$ lang und bilden den Winkel $\sphericalangle AMB = \gamma = 120°30' \; (41{,}9°)$. Eine geradlinige Verbindungsstrecke $\overline{AB} = c$ soll die Siedlungen direkt miteinander verbinden. Wie lang wird sie?



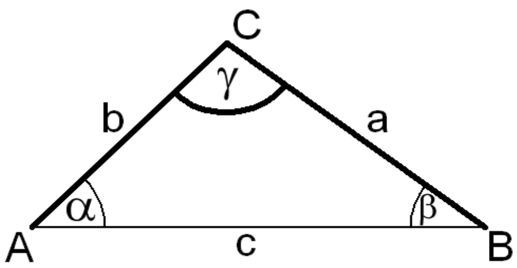
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}$$

(1) $c = 5{,}6 \text{ km}$

(2) $c = 6{,}348 \text{ km}$

4. Um die Länge $\overline{AB} = c$ eines geplanten Tunnels durch einen Berg zu bestimmen, werden von einem Punkt C (gleiche Höhe wie A und B) die Entfernungen $\overline{AC} = b = 650 \text{ m } (5{,}1 \text{ km})$, $\overline{BC} = a = 433 \text{ m } (3{,}170 \text{ km})$ sowie der Winkel $\sphericalangle ACB = \gamma = 29{,}3° \; (76{,}3°)$ gemessen. Wie lang wird der geplante Tunnel und unter welchen Winkeln $\sphericalangle BAC = \alpha$ und $\sphericalangle ABC = ß$ muss er angelegt werden?



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

(1) $c = 345{,}09 \text{ m}$

(2) $c = 5{,}329 \text{ m}$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$$

(1) $\alpha = 37{,}89°$

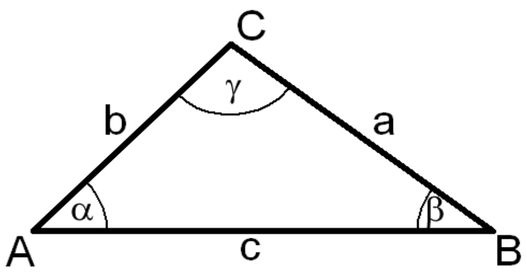
(2) $\alpha = 35{,}3°$

(1) $ß = 180° - (37{,}89° + 29{,}3°)$

$ß = 112{,}81°$

(2) $ß = 68{,}4°$

5. Im Rahmen eines Segelflugwettbewerbs findet ein Dreiecksflug statt mit den Streckenlängen $\overline{BC} = a = 200$ km (263,5 km), $\overline{CA} = b = 85$ km (383,7 km) und $\overline{AB} = c = 205$ km (154,6 km). Berechne die Winkel $\sphericalangle ABC = ß$, $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle BCA = \gamma$ dieses Dreieckskurses.



Berechnung von α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(1) $\alpha = 74{,}6°$

(2) $\alpha = 31°$

Berechnung von ß:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin ß}$$

$$\sin ß = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

(1) $ß = 24{,}2°$

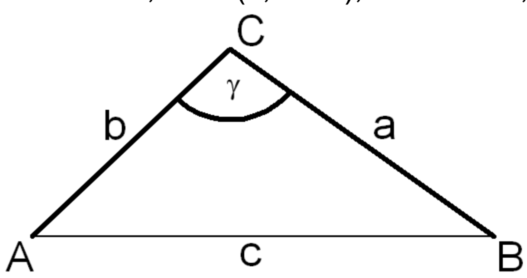
(2) $ß = 48{,}6°$

Berechnung von γ:

(1) $\gamma = 180° - (74{,}6° + 24{,}2°) = 81{,}2°$

(2) $\gamma = 100{,}4°$

6. Eine Regatta wird auf einem Dreieckskurs gesegelt. Von der Startboje S sieht man die beiden Wendebojen unter A und B unter dem Winkel $\sphericalangle ASB = \gamma = 72°$ (94°). Wie groß ist die Entfernung $\overline{AB} = c$, wenn die Streckenlängen $\overline{SA} = b = 4{,}2$ km (2,4 km), $\overline{SB} = a = 2{,}8$ km (5,1 km) betragen?

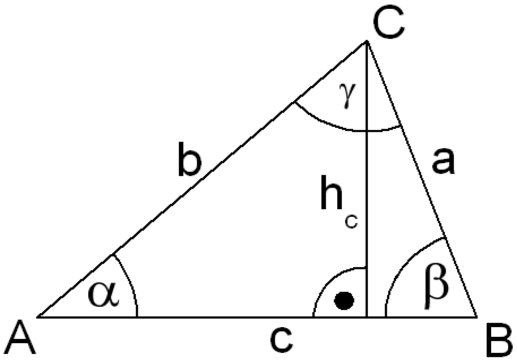


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

(1) $c = 4{,}267$ km

(2) $c = 5{,}786$ km

7. Ein Grundstück hat die Form eines Dreiecks. Die Seitenlängen betragen a = 102 m (312 m), b = 61 m (109 m) und c = 109 m (229 m). Welchen Inhalt hat die Grundstücksfläche?



Berechnung von α:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(1) $\alpha = 67°$

(2) $\alpha = 131{,}4°$

Berechnung von A:

$$A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$$

(1) $A = 3\,059{,}87$ m²

(2) $A = 9\,359{,}13$ m²